І.В. Федак

Елементи теорії міри та інтеграла Лебега

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки “математика” вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2010

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф72

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки "математика" вищих навчальних закладів
(лист № 1/11 – 1631 від 11.03.10)

Рецензенти:

Лопушанський О.В., зав. відділу функціонального аналізу Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор

Маслюченко В.К., зав. кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича, доктор фізико-математичних наук, професор

Філевич П.В., зав. кафедри інформаційних систем менеджменту Львівського національного університету ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С.Гжицького, доктор фізико-математичних наук, професор

Федак І.В.
Елементи теорії міри та інтеграла Лебега: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 168с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з дисципліни «Теорія міри та інтеграла» для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «математика» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Містить основні поняття та теореми з теорії міри та інтеграла Лебега, задачі для самостійного розв'язування.

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73

Зміст

Передмова

Пропонований вашій увазі посібник написаний на основі курсу лекцій з дисципліни «Теорія міри та інтеграла», які на протязі багатьох років читались його автором для студентів Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Поняття міри – одне з найважливіших понять як у математиці, так і у філософії. Ще у Стародавній Греції вважали, що все має міру: довжину, площу, ціну тощо.

Саме від площі ми і будемо відштовхуватися при введенні даного поняття. Основні властивості площі, такі як невід'ємність та адитивність, природним чином покладаються в основу загального означення міри, визначеної на довільному півкільці множин.

З метою досягнення більшою наочності ми спочатку визначимо міру m на півкільці прямокутників на площині, сторони яких паралельні до координатних осей. Далі поширимо цю міру на елементарні множини, які утворюють мінімальне кільце множин, породжене цим півкільцем. І, нарешті, розглянемо лебегове продовження такої міри на $\sigma-$алгебри множин. Зробимо також порівняння міри Лебега з мірою Жордана, з якою студенти вже частково знайомі з курсу математичного аналізу. Також вкажемо на інший підхід до означення вимірності за Лебегом, який реалізований, наприклад, у підручнику $[2]$.

Отримані при цьому властивості мір цілком аналогічно можуть бути доведені для мір, визначених на довільних півкільцях множин, та їх продовжень. Тому на доведенні цих властивостей для довільних мір ми зупинятися не будемо, а лише вкажемо на спосіб їх отримання та рекомендуємо літературу, в якій з такими доведеннями можна ознайомитися.

Для теорії інтегрування важливу роль відіграє й поняття вимірної функції. Тому в посібнику вивчаються основні властивості таких функцій, які тісно пов'язані з властивостями вимірних множин. Аналізуються також властивості послідовностей таких функцій. Вказано і на більш загальний підхід до поняття вимірності функції.

З курсу математичного аналізу студенти вже знайомі з означенням та властивостями інтеграла Рімана. Надалі при викладі матеріалу ми будемо вважати наявними знання читачами цих властивостей, наприклад, в об'ємі підручників [17], [18].

Існують різні методичні підходи для введення інтеграла Лебега (див., наприклад, [2],[7],[8],[12],[14],[21]). За аналогією з [7] ми спочатку введемо поняття такого інтеграла для простих функцій, тобто вимірних функцій, які набувають не більше, як зліченну кількість різних значень, а вже потім поширимо його на довільні вимірні за Лебегом функції. Водночас вкажемо і на можливість означення інтеграла Лебега як границі інтегральних сум та його порівняння з інтегралом Рімана.

У посібнику мова бути йти в основному про інтегрування відносно міри Лебега. Але зрозуміло, що отримані при цьому властивості інтеграла збережуться і при інтегруванні відносно інших повних $\sigma-$адитивних мір.

Для вивчення властивостей невизначеного інтеграла Лебега детально зупинимося на аналізі основних властивостей монотонних функцій, функцій з обмеженою зміною та абсолютно неперервних функцій. А також проведемо деяку аналогію між властивостями невизначених інтегралів Лебега та Рімана.

Як узагальнення будемо розглядати інтеграл Лебега як функцію множини та введемо поняття знакозмінних мір. Вкажемо також на інші принципово відмінні підходи до введення самого поняття інтеграла, в тому числі і без використання поняття міри. Зокрема, розглянемо найпростіші узагальнення мір та інтегралів Лебега, якими є міри та інтеграли Лебега-Стільтьєса.

Для цілісності викладу матеріалу в перших шести параграфах посібника розглядаються також деякі загальні властивості множин, які будуть надалі суттєво використовуватися при розгляді питань, пов'язаних з мірою та інтегралом Лебега.

Теоретичний матеріал, на скільки це було можливо в рамках порівняно невеликого за об'ємом лекційного курсу, ілюструється прикладами розв'язування конкретних задач та аналізом необхідності чи суттєвості умов ряду доведених теорем.

Крім того, для закріплення прочитаного матеріалу запропоновано 25 практичних завдань, кожне з яких складається з десяти однотипних прикладів. Їх можна використати, наприклад, для домашньої контрольної роботи. Для проведення практичних занять рекомендуємо також посібники: [3],[5],[6],[11],[13],[16].

Список літератури.

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368с.
2. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
3. *Антоневич А.Б., Ваткина Е.И., Мазель М.Х. и др.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
4. *Гелбаум И.М., Олмстед Дж. Т.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 251с.
5. *Дороговцев А.Я., Константинов О.Ю., Курченко О.О., Івасишен С.Д.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Теорія міри та інтеграла» для студентів спеціальності «математика». – К.: КДУ, 1991. – 76с.
6. *Кириллов А.А, Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979. – 384с.
7. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
8. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520с.
9. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 272с.
10. *Маслюченко В.К.* Елементи теорії множин: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
11. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Філіпчук О.І.* Задачі та теореми загальної теорії функцій: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 80с.
12. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
13. *Очан Ю.С.* Сборник задач по функциональному анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
14. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
15. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 288с.

16. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112с.
17. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа, том I. – М.: Наука, 1968. – 440с.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа, том II. – М.: Наука, 1968. – 464с.
19. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 290с.
20. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 436с.
21. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл, мера, производная. – М.: Наука, 1967. – 220с.

Предметний покажчик