

І.В. Федак

Елементи теорії міри та інтеграла Лебега

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів напрямів
підготовки “математика” вищих навчальних закладів*

Івано-Франківськ
2010

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф72

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки
“математика” вищих навчальних закладів
(лист № 1/11 – 1631 від 11.03.10)*

Рецензенти:

Лопушанський О.В., зав. відділу функціонального аналізу
Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН
України, доктор фізико-математичних наук, професор

Маслюченко В.К., зав. кафедри математичного аналізу
Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича,
доктор фізико-математичних наук, професор

Філевич П.В., зав. кафедри інформаційних систем
менеджменту Львівського національного університету
ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С.Гжицького,
доктор фізико-математичних наук, професор

Федак І.В.

Елементи теорії міри та інтеграла Лебега: Навчальний
посібник. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 168с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з
дисципліни «Теорія міри та інтеграла» для студентів, які
навчаються за напрямом підготовки «математика» освітньо-
кваліфікаційного рівня «бакалавр». Містить основні поняття та
теореми з теорії міри та інтеграла Лебега, задачі для самостійного
розв'язування.

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73

©Федак І.В., 2010

Зміст

Передмова.....	5
Розділ I. ВИМІРНІ МНОЖИНИ ТА ВИМІРНІ ФУНКЦІЇ.	
§ 1. Множини та операції над ними.....	7
§ 2. Злічені та незлічені множини.....	10
§ 3. Потужність множини.....	12
§ 4. Системи множин.....	15
§ 5. Множини і метричні простори.....	18
§ 6. Відкриті та замкнені множини.....	21
§ 7. Канторова множина.....	24
§ 8. Поняття міри. Міра елементарних множин.....	26
§ 9. Півадитивність та σ – адитивність міри елементарних множин.....	28
§ 10. Лебегове продовження міри.....	31
§ 11. Адитивність міри Лебега.....	33
§ 12. σ – алгебра вимірних за Лебегом множин.....	35
§ 13. σ – адитивність та неперервність міри Лебега.....	37
§ 14. Загальне означення міри. Приклади мір.....	39
§ 15. Лебегове продовження міри, визначеної на півкільці множин.....	42
§ 16. σ – скінченні міри.....	45
§ 17. Міра Жордана та її зв'язок з мірою Лебега.....	47
§ 18. Загальні зауваження про проблему міри.....	48
§ 19. Означення та приклади вимірних функцій.....	50
§ 20. Дії над вимірними функціями.....	53
§ 21. Границі послідовностей вимірних функцій.....	55
§ 22. Теорема Єгорова та наслідок з неї.....	58
§ 23. Теорема Ріса про підпослідовності збіжних за мірою послідовностей.....	60
§ 24. Загальний підхід до поняття вимірності функцій.....	62
Розділ II. ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА.	
§ 1. Означення інтеграла Лебега.....	64
§ 2. Основні властивості інтеграла Лебега.....	68
§ 3. σ – адитивність і абсолютна неперервність інтеграла Лебега.....	71

§ 4.	Збіжність в середньому та її зв'язок з іншими видами збіжності.....	75
§ 5.	Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.....	78
§ 6.	Порівняння інтегралів Рімана та Лебега.....	82
§ 7.	Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми.....	85
§ 8.	Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри.....	88
§ 9.	Простори сумовних функцій.....	90
§ 10.	Поняття про добутки мір та їх подання через інтеграли мір перерізів.....	94
§ 11.	Теорема Фубіні.....	96
§ 12.	Поняття невизначеного інтеграла Лебега.....	100
§ 13.	Монотонні функції та їх властивості.....	102
§ 14.	Теорема Лебега про похідну монотонної функції....	106
§ 15.	Диференціювання ряду з монотонних функцій.....	111
§ 16.	Функції з обмеженою зміною.....	113
§ 17.	Варіаційна функція та її властивості.....	118
§ 18.	Похідна невизначеного інтеграла Лебега.....	120
§ 19.	Інтегровність похідної монотонної функції.....	122
§ 20.	Абсолютно неперервні функції та їх властивості.....	124
§ 21.	Зв'язок між абсолютною неперервністю і невизначеним інтегралом Лебега.....	128
§ 22.	Поняття про знакозмінні міри та теорему Радона-Нікодима.....	131
§ 23.	Міри та інтеграл Лебега-Стільтьєса.....	133
§ 24.	Інтеграл Рімана-Стільтьєса. Теорема Хеллі.....	137
§ 25.	Деякі узагальнення поняття інтеграла.....	140
	Задачі для самостійного розв'язування.....	143
	Список літератури.....	159
	Предметний показчик.....	161

Передмова

Пропонований вашій увазі посібник написаний на основі курсу лекцій з дисципліни «Теорія міри та інтеграла», які на протязі багатьох років читались його автором для студентів Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Поняття міри – одне з найважливіших понять як у математиці, так і у філософії. Ще у Стародавній Греції вважали, що все має міру: довжину, площу, ціну тощо.

Саме від площі ми і будемо відштовхуватися при введенні даного поняття. Основні властивості площі, такі як невід’ємність та адитивність, природним чином покладаються в основу загального означення міри, визначеної на довільному півкільці множин.

З метою досягнення більшою наочністю ми спочатку визначимо міру m на півкільці прямокутників на площині, сторони яких паралельні до координатних осей. Далі поширимо цю міру на елементарні множини, які утворюють мінімальне кільце множин, породжене цим півкільцем. І, нарешті, розглянемо лебегове продовження такої міри на σ -алгебри множин. Зробимо також порівняння міри Лебега з мірою Жордана, з якою студенти вже частково знайомі з курсу математичного аналізу. Також вкажемо на інший підхід до означення вимірності за Лебегом, який реалізований, наприклад, у підручнику [2].

Отримані при цьому властивості мір цілком аналогічно можуть бути доведені для мір, визначених на довільних півкільцях множин, та їх продовжень. Тому на доведенні цих властивостей для довільних мір ми зупинятися не будемо, а лише вкажемо на спосіб їх отримання та рекомендуємо літературу, в якій з такими доведеннями можна ознайомитися.

Для теорії інтегрування важливу роль відіграє й поняття вимірної функції. Тому в посібнику вивчаються основні властивості таких функцій, які тісно пов’язані з властивостями вимірних множин. Аналізуються також властивості послідовностей таких функцій. Вказано і на більш загальний підхід до поняття вимірності функції.

З курсу математичного аналізу студенти вже знайомі з означенням та властивостями інтеграла Рімана. Надалі при

викладі матеріалу ми будемо вважати наявними знання читачами цих властивостей, наприклад, в об'ємі підручників [17], [18].

Існують різні методичні підходи для введення інтеграла Лебега (див., наприклад, [2],[7],[8],[12],[14],[21]). За аналогією з [7] ми спочатку введемо поняття такого інтеграла для простих функцій, тобто вимірних функцій, які набувають не більше, як зліченну кількість різних значень, а вже потім поширимо його на довільні вимірні за Лебегом функції. Водночас вкажемо і на можливість означення інтеграла Лебега як границі інтегральних сум та його порівняння з інтегралом Рімана.

У посібнику мова бути йти в основному про інтегрування відносно міри Лебега. Але зрозуміло, що отримані при цьому властивості інтеграла збережуться і при інтегруванні відносно інших повних σ -адитивних мір.

Для вивчення властивостей невизначеного інтеграла Лебега детально зупинимося на аналізі основних властивостей монотонних функцій, функцій з обмеженою зміною та абсолютно неперервних функцій. А також проведемо деяку аналогію між властивостями невизначених інтегралів Лебега та Рімана.

Як узагальнення будемо розглядати інтеграл Лебега як функцію множини та введемо поняття знакозмінних мір. Вкажемо також на інші принципово відмінні підходи до введення самого поняття інтеграла, в тому числі і без використання поняття міри. Зокрема, розглянемо найпростіші узагальнення мір та інтегралів Лебега, якими є міри та інтеграли Лебега-Стільтьєса.

Для цілісності викладу матеріалу в перших шести параграфах посібника розглядаються також деякі загальні властивості множин, які будуть надалі суттєво використовуватися при розгляді питань, пов'язаних з мірою та інтегралом Лебега.

Теоретичний матеріал, на скільки це було можливо в рамках порівняно невеликого за об'ємом лекційного курсу, ілюструється прикладами розв'язування конкретних задач та аналізом необхідності чи суттєвості умов ряду доведених теорем.

Крім того, для закріплення прочитаного матеріалу запропоновано 25 практичних завдань, кожне з яких складається з десяти однотипних прикладів. Їх можна використати, наприклад, для домашньої контрольної роботи. Для проведення практичних занять рекомендуємо також посібники: [3],[5],[6],[11],[13],[16].

Список літератури.

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368с.
2. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
3. *Антоневич А.Б., Ваткина Е.И., Мазель М.Х. и др.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
4. *Гелбаум И.М., Олмстед Дж. Т.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 251с.
5. *Дороговцев А.Я., Константинов О.Ю., Курченко О.О., Івасишен С.Д.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Теорія міри та інтеграла» для студентів спеціальності «математика». – К.: КДУ, 1991. – 76с.
6. *Кириллов А.А, Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979. – 384с.
7. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Элементы теории функций і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
8. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520с.
9. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 272с.
10. *Маслюченко В.К.* Элементы теории множин: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 132с.
11. *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Філіпчук О.І.* Задачі та теореми загальної теорії функцій: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 80с.
12. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
13. *Очан Ю.С.* Сборник задач по функциональному анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
14. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
15. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968. – 288с.

16. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112с.
17. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа, том I. – М.: Наука, 1968. – 440с.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа, том II. – М.: Наука, 1968. – 464с.
19. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 290с.
20. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 436с.
21. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.* Интеграл, мера, производная. – М.: Наука, 1967. – 220с.

Предметний покажчик

Абсолютна неперервність

- заряду, 132
- інтеграла Лебега, 73
- міри, 135

Абсолютно неперервна функція, 124

Адитивність міри

- елементарних множин, 28
- Лебега, 34
- прямокутників, 27

Аксиома симетрії, 18

Алгебра

- множин, 16
- вимірних за Лебегом множин, 35

Алгебраїчні дії над вимірними функціями, 53-55

Бієкція, 10

Борелівська

- множина, 17
- функція, 63

Важка задача теорії вимірювань, 49

Варіаційна функція, 118

Варіація функції, 113

Взаємно однозначна відповідність, 10

Вимірна

- множина, 33
- функція, 50

Вимірність

- борелівської функції, 63
- відкритої множини, 36
- замкненої множини, 36
- монотонної функції, 103

Висновок

- про абсолютну неперервність невизначеного інтеграла Лебега, 128
- про вимірність неперервної функції, 57
- про інтеграл Лебега від невід'ємної функції як міру множини, 74
- про представлення міри Лебега-Стільтьеса, 135
- про представлення функцій з обмеженою зміною, 120

Вичерпна послідовність, 89

Відкрита

- куля, 19
- множина, 23

Відновлення абсолютно неперервної функції за її похідною, 131

Відстань у метричному просторі, 18

Властивості

- абсолютно неперервних функцій, 125
- варіаційної функції, 119
- відкритих множин, 24
- замкнених множин, 22
- злічених множин, 10
- інтеграла Лебега, 68
- інтеграла Лебега від простих функцій, 65
- канторової множини, 25
- монотонних функцій, 103
- операції замикання, 21
- операцій над множинами, 8
- функцій з обмеженою зміною, 115

Внутрішня міра

- множини, 33
- Жордана, 48

Внутрішня точка множини, 20

Гранична точка множини, 20

Граничний перехід під знаком інтеграла

- Лебега, 78
- Стільтьєса, 139

Границя послідовності

- вимірних функцій, 55
- точок метричного простору, 20

Двоїстості принцип, 9

Добуток

- мір, 94
- множин, 9
- систем множин, 18

Доповнення множини, 9

δ – алгебра множин, 16

δ – кільце множин, 16

Еквівалентні

- множини, 12
- функції, 50

Елементарна множина, 27

ε – окіл, 19

Загальне означення

- вимірної функції, 62
- інтеграла Лебега, 66
- міри, 39

Загальні зауваження про проблему міри, 48

Задача

- важка, легка теорії вимірювань, 49
- на побудову множини із заданою мірою, 43

Замикання множини, 21

Замкнена

- куля, 19
- множина, 21

Заряд, 132

- абсолютно неперервний, 132
- дискретний, 132
- неперервний, 132
- сингулярний, 132

Зауваження

- загальні про проблему міри, 48
- про аналіз умов теореми Фубіні, 98-100
- про вимірність границі збіжної майже скрізь послідовності, 56
- про вимірність неперервної функції, 56
- про властивості інтеграла Лебега на множині нескінченної міри, 74
- про зв'язок між вимірними множинами і вимірними функціями, 52, 53

Збіжність послідовності

- в середньому, 75
- в середньому квадратичному, 93
- майже скрізь, 56
- за мірою, 57
- рівномірна, 58
- у метричному просторі, 20

Зв'язок збіжності в середньому з іншими видами збіжності, 75

Зліченна

- адитивність міри, 30
- множина, 10

Зліченність множини раціональних чисел, 11

Зовнішня міра

- Жордана, 48
- множини, 31

Ізольована точка множини, 20

Інтеграл

- Данжуа, 141
- Лебега, 66
- Лебега-Стільтьєса, 135
- Перрона, 141
- Рімана, 82
- Рімана-Стільтьєса, 137
- T – інтеграл, 141

Інтеграл Лебега

- невизначений, 100
- по множині скінченної міри, 66
- по множині нескінченної міри, 88
- простої функції, 64
- основні властивості, 68
- як границя інтегральної суми, 85
- як функція множини, 74, 100

Інтеграл мір перерізів, 94

Інтегральна нерівність Коші-Буняковського, 92

Інтегровність похідної функції з обмеженою зміною, 123

Канторова множина, 24

Канторові сходи, 124

Кільце

- вимірних за Жорданом множин, 48
- елементарних множин, 27
- мінімальне, 17
- множин, 16

Компактна множина, 24

Компактний простір, 24

Класифікація точок множини, 20

Коректність означення інтеграла Лебега, 67

Лебегове продовження міри

- визначеної на півкільці множин, 42
- визначеної на півкільці множин без одиниці, 44
- елементарних множин, 32,

Легка задача теорії вимірювань, 49

Лема

- Гейне-Бореля, 24
- про абсолютно неперервні функції з нульовою майже скрізь похідною, 129
- про різницю зовнішніх мір, 32
- Ріса, 107

Лінійний простір

- абсолютно неперервних функцій, 126
- сумовних функцій, 90
- функцій, інтегровних з квадратом, 92
- функцій з обмеженою зміною, 116

Метрика, 18

Метричний простір, 18

- R^1 , 18

- R^n , 18
- $C[a,b]$, 19

Мінімальна алгебра множин, 17

Мінімальне кільце множин, 17

Міра

- абсолютно неперервна, 135
- адитивна, 27, 33, 39
- внутрішня, 33
- дискретна, 135
- Жордана, 47
- знакозмінна, 132
- зовнішня, 31
- елементарної множини, 27
- ймовірностна, 40
- Лебега, 32, 43
- Лебега-Стільтьєса, 134
- лінійна, 39
- неперервна, 38
- плоска, 26, 39
- повна, 32
- прямокутника, 26
- сингулярна, 135
- σ – адитивна, 30, 37, 40
- σ – скінченна, 45

Множина, 7

- вимірна за Жорданом, 47
- вимірна за Лебегом, 32, 42
- дійсних чисел відрізка $[0,1]$, 12
- зліченна, 10
- канторова, 24
- незліченна, 12
- нескінченна, 10
- порожня, 7
- раціональних чисел, 10
- скінченна, 10

Монотонна функція, 102

Наслідок з нерівності Чебишова, 76

Наслідок теореми

- Кантора-Бернштейна, 13
- Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, 79
- Леві, 81
- про неперервність міри Лебега, 38
- про подання плоскої міри через інтеграл лінійної міри перерізів, 96

- про порівняння інтегралів Лебега та Рімана, 83
- Ріса, 62

Нескінченна множина, 10

Незліченна множина, 12

Незліченність множини

- дійсних чисел, 12
- ірраціональних чисел, 12

Неперервність

- заряду, 132
- зліва, справа, 102
- зліва функції стрибків, 105
- міри, 38
- функції, 102

Необхідні і достатні умови

- вимірності функції, 58
- інтегровності за Ріманом, 83

Нерівність

- Коші-Буняковського, 19
- інтегральна Коші-Буняковського, 92
- трикутника, 18
- Чебишова, 76

Норма, 91

Нормований простір, 90

- $L_1(X, \mu)$, 91
- $L_2(X, \mu)$, 93
- функцій з обмеженою зміною, 116

Носій заряду, 132

Об'єднання множин, 8

Одиниця системи множин, 16

Одиничний квадрат, 31

Окіл точки, 19

Операції над множинами

- асоціативність, 8
- бієкція, 10
- дистрибутивність, 8, 10
- доповнення, 9
- еквівалентність, 12
- замикання, 21
- комутативність, 8
- об'єднання, 8
- перетин, 8
- прямиий добуток, 9
- різниця, 9

- симетрична різниця, 9
- Основні властивості інтеграла Лебега, 68

Перетин

- кілець множин, 17
- множин, 8

Півадитивність міри елементарних множин, 30

Півкільце множин, 17

Підмножина, 7

Підпокриття, 24

Підпоследовності збіжних за мірою последовностей, 61

Площа прямокутника, 27

Повна зміна (варіація) функції, 113

Повнота міри, 32

Покриття, 24

Порожня множина, 7

Порівняння

- інтегралів Рімана та Лебега, 82
- потужностей, 13

Потужність

- зліченної множини, 13
- континууму, 14
- гіперконтинууму, 15
- множини, 12
- множини підмножин заданої множини, 15
- скінченної множини, 13

Похідна

- заряду, 133
- лівостороння, правостороння, 106
- монотонної функції, 111
- невизначеного інтеграла Лебега, 120
- функції, 106
- функції стрибків, 107

Похідні числа, 106

Приклад

- вимірної за Лебегом, але не вимірної за Жорданом плоскої множини, 47
- збіжної в середньому, але не збіжної в жодній точці последовності, 76
- збіжної за мірою, але не збіжної в жодній точці последовності, 60
- знаходження варіаційної функції, 118
- знаходження повної зміни функції, 117
- класифікації точок множини, 21
- адитивної міри, яка не є σ – адитивною, 40
- не вимірної за Лебегом множини, 48

- обчислення інтеграла Лебега за означенням інтеграла, 66
- обчислення інтеграла Лебега по множині нескінченної міри, 89
- обчислення інтеграла Лебега-Стільтьєса, 136
- побудови множини із заданою мірою, 43
- функції з не інтегрованою за Лебегом похідною, 101
- функції з не обмеженою зміною, 114
- функції канторові сходи, 123

Приклади

- вимірних функцій, 51
- встановлення бієкції між множинами, 13
- метричних просторів, 18
- мір, 39
- на аналіз умов теореми Фубіні, 98, 99
- обчислення інтеграла Лебега, 84, 85

Принцип двоїстості, 9

Продовження міри

- за Жорданом, 47
- за Лебегом, 32, 42

Проста функція, 57

Простір

- лінійний, 90
- метричний, 18
- нормований, 90
- сумовних функцій, 90

Пряма сума σ – алгебр вимірних за Лебегом множин, 46

Прямий добуток

- мір, 94
- множин, 9
- систем множин, 18

Прямокутник на площині, 26

Рівномірна

- збіжність, 58
- неперервність, 124

Різниця множин, 9

Розклад заряду, 132

Розрив

- першого, другого роду, 103
- усувний, 103

Симетрична різниця множин, 9

Системи множин, 15

Степінь міри, 95

Стрибок функції, 103

Структура відкритих і замкнених множин на числовій прямій, 23

Суми

- Дарбу, 82
- Лебега, 86

σ – алгебра множин, 16

σ – кільце множин, 16

σ – адитивність

- інтеграла Лебега, 71
- міри елементарних множин, 30
- міри Лебега, 37, 43

σ – скінченна міра, 45

Теорема

- Банаха, 49
- Єгорова, 58
- Кантора-Бернштейна, 13
- Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, 78
- Лебега про збіжність за мірою збіжної майже скрізь послідовності, 59
- Лебега про інтегрування похідної абсолютно неперервної функції, 130
- Лебега про похідну монотонної функції, 111
- Леві, 79
- Лузіна, 57
- Радона-Нікодима, 133
- Ріса, 61
- Фату, 81
- Фубіні про диференціювання ряду з монотонних функцій, 111
- Фубіні про зведення інтеграла Лебега до повторних інтегралів, 97
- Хаусдорфа, 49
- Хеллі, 139

Теорема про

- абсолютну неперервність інтеграла Лебега, 73
- адитивність міри Лебега, 34
- вимірність суперпозиції функцій, 63
- границю послідовності вимірних функцій, 55
- еквівалентність означень вимірності функції, 51
- зв'язок між інтегралами Лебега-Стільтьєса та Рімана-Стільтьєса, 138
- зв'язок між мірами множини та її доповнення, 32
- інтегровність похідної монотонної функції, 122
- мінімальне кільце, породжене півкільцем множин, 18
- неперервність міри Лебега, 38
- необхідну і достатню умову вимірності функції, 58
- об'єднання злічених множин, 10
- півадитивність міри елементарних множин, 29
- подання плоскої міри через інтеграл лінійної міри перерізів, 96
- порівняння інтегралів Лебега та Рімана, 82

- потужність множини всіх підмножин заданої множини, 15
- похідну невизначеного інтеграла Лебега, 121
- представлення монотонних функцій, 105
- середнє, 139
- σ – алгебру вимірних за Лебегом множин, 35
- σ – адитивність інтеграла Лебега, 71

Теореми про

- зв'язок збіжності в середньому з іншими видами збіжності, 75- 78
- інтегрування за Лебегом частинами та заміною змінної, 131
- об'єднання, перетини та доповнення замкнених і відкритих множин, 22-24

Точка дотику множини, 20

Точки розриву

- монотонної функції, 104
- першого, другого роду, 103

Формула

- заміни змінних в інтегралі Лебега, 131
- інтегрування частинами інтегралів Лебега, 131
- інтегрування частинами інтегралів Стільтьєса, 138

Функція

- абсолютно неперервна, 124
- варіаційна, 118
- вимірна, 50
- вимірна за Борелем, 63
- диференційовна, 106
- Діріхле, 65
- з обмеженою зміною, 113
- інтегровна за Лебегом, 66
- інтегровна з квадратом, 91
- канторові сходи, 124
- монотонно незростаюча, неспадна, 102
- не обмежена зверху, 87
- неперервна, 102
- неперервна зліва, справа, 102
- проста, 57
- рівномірно неперервна, 124
- сингулярна, 134
- стрибків, 105
- сумовна, 64, 90
- східчаста, 105
- T – інтегровна, 141
- μ – вимірна, 63
- $(\tilde{G}_x, \tilde{G}_y)$ – вимірна, 6