**І.В. Федак**

# Функціональний аналіз

**Навчальний посібник**

**для студентів спеціальностей «Інформатика» та «Прикладна математика»**

**Івано-Франківськ
2011**

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф72

*Друкується за рішенням вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника від 8 вересня 2009 р.*

*Рецензенти:*

Загороднюк А.В., зав. кафедрою математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, доктор фізико-математичних наук

Кукуш О.Г., професор кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук

Маслюченко В.К., зав. кафедрою математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, доктор фізико-математичних наук, професор

**Федак І.В.**

Функціональний аналіз: Навчальний посібник для студентів спеціальностей «Інформатика», «Прикладна математика». – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з дисципліни «Функціональний аналіз» для студентів, які навчаються за напрямами підготовки «Інформатика» та «Прикладна математика» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Містить основні поняття та теореми з функціонального аналізу, завдання для проведення практичних занять з функціонального аналізу.

## ЗМІСТ

***Розділ IV. Лінійні функціонали та лінійні оператори***

**Контрольні питання до заліку з функціонального аналізу**

1. Об’єднання, перетин, різниця та симетрична різниця множин. Обґрунтувати дистрибутивність операцій об’єднання та перетину множин одна відносно одної.
2. Поняття зліченної та незліченної множини. Обґрунтувати зліченність множини раціональних та незліченність множини ірраціональних чисел.
3. Поняття міри прямокутника та елементарної множини. Обґрунтувати $\sigma-$адитивність міри елементарних множин.
4. Поняття про міру Лебега та її основні властивості. Обґрунтувати неперервність міри Лебега.
5. Поняття про вимірні функції. Довести за означенням вимірність заданої функції.
6. Інтеграл Лебега для простих функцій та його властивості. Навести приклади обчислення інтегралів Лебега від простих функцій, які набувають скінченну та зліченну множини значень.
7. Сформулювати загальне означення інтеграла Лебега по множині скінченної міри та довести його коректність.
8. Зв'язок між інтегралами Лебега та Рімана. Обчислити заданий інтеграл Лебега, звівши його до обчислення інтеграла Рімана.
9. Поняття метрики та метричного простору. Навести п’ять прикладів метричних просторів і обґрунтувати виконання аксіом метрики в одному з них.
10. Поняття збіжної та фундаментальної послідовності. Обґрунтувати зв’язок між такими послідовностями.
11. Поняття повного метричного простору. Обґрунтувати повноту простору $R^n$.
12. Теорема про вкладені кулі. Доведення теореми.
13. Поняття про неперервні та стискаючі відображення метричних просторів. Довести теорему Банаха про принцип стискаючих відображень.
14. Поняття про застосування принципу стискаючих відображень до розв’язування задачі Коші. Розв’язати задану задачу Коші методом послідовних наближень.

15. Поняття про застосування принципу стискаючих відображень до розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Розв’язати задане інтегральне рівняння методом послідовних наближень.
16. Поняття лінійного простору та його розмірності. Навести приклади лінійних просторів та їх власних підпросторів.
17. Поняття норми та нормованого простору. Їх зв'язок з метричними просторами. Навести приклади п’яти нормованих просторів та їх норм.
18. Дослідити задану послідовність на збіжність у просторі $C[a,b]$, $L_1[a,b]$ чи $L_2[a,b]$.
19. Поняття про збіжність у середньому. Обґрунтувати її зв'язок з рівномірною збіжністю та збіжністю за мірою.
20. Поняття скалярного добутку та евклідового простору. Обґрунтувати необхідність умови характеристичної властивості евклідового простору.
21. Довести нерівність Коші-Буняковського та записати, як вона виглядає у конкретних евклідових просторах.
22. Обґрунтувати лінійну незалежність ортогональної системи. Навести приклади ортогональних базисів у конкретних евклідових просторах.
23. Поняття про ряди Фур’є. Довести нерівність Бесселя.
24. Розкласти задану функцію у ряд Фур’є відносно повної ортогональної нормованої системи у просторі $L_2[a,b]$.
25. Поняття про гільбертові простори. Довести теорему про ізоморфізм дійсних гільбертових просторів.
26. Поняття лінійного функціонала, його неперервності, обмеженості та норми. Довести, що заданий функціонал $f:C[a,b]\to R^1$ є лінійним неперервним функціоналом і знайти його норму.
27. Поняття спряженого простору. Довести повноту простору, спряженого до нормованого.
28. Поняття узагальненої функції та її похідної. Обчислити похідну заданої регулярної узагальненої функції.
29. Поняття лінійного оператора, його обмеженості та норми. Проаналізувати властивості інтегрального оператора Фредгольма у просторі $C[a,b]$.

30. Поняття про оборотні та обернені оператори. Довести лінійність оператора, оберненого до лінійного.
31. Довести лінійність та обмеженість заданого оператора $A: l_2 \to l_2$ і знайти обернений до нього оператор.
32. Обґрунтувати існування оператора, оберненого до $I - A$, та розкрити суть застосувань цієї теореми.
33. Поняття про розв'язування інтегральних рівнянь методом ітерованих ядер. Розв'язати задане інтегральне рівняння Фредгольма другого роду методом ітерованих ядер.
34. Поняття про спектр та резольвенту оператора. Довести теорему про регулярні точки лінійного обмеженого оператора.
35. Поняття спряженого та самоспряженого операторів. Обґрунтувати властивості власних значень та власних функцій самоспряженого оператора у гільбертовому просторі.
36. Поняття про компактні оператори. Обґрунтувати компактність у просторі $C[a,b]$ інтегрального оператора Фредгольма з неперервним ядром.

## Список основної літератури


1. *Дороговцев А.Я., Івасишен С.Д., Кондратьєв Ю.Г., Константинов О.Ю.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Функціональний аналіз та інтегральні рівняння» для студентів спеціальності «математика». – Чернівці: ЧДУ, 1992. – 109с.
2. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
3. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учебное пособие. – М.: Просвещение, 1981. – 271с.
4. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1980. – 112с.