Курс лекцій з функціонального аналізу та лінійних інтегральних рівнянь

Вступ. Предмет функціонального аналізу.

Розділ 1. Множини та метричні простори.

1. Множини та операції над ними.
2. Зчисленні множини та їх властивості.
3. Існування незчисленних множин.
4. Потужність множини. Порівняння потужностей.
5. Аксіоми відстані. Поняття про метричні простори.
6. Класифікація точок множини. Операція замикання.
7. Щільні підмножини. Сепарабельність.
8. Відкриті та замкнені множини і зв'язок між ними.
9. Структура відкритих і замкнених множин на числовій прямій. Канторова множина.
10. Відкриті множини і топологія. База топології.
11. Поняття про компактність та зчисленну компактність.
12. Цілком обмежені множини.
13. Повна обмеженість зчисленно-компактного метричного простору.
14. Передкомпактні множини. Теорема Арцела.
15. Системи множин.

Розділ 2. Вимірні множини та вимірні функції.

1. Поняття міри. Міра елементарних множин.
2. Півадитивність та σ- адитивність міри елементарних множин.
3. Зовнішня міра множини. Лебегове продовження міри.
4. Кільце вимірних за Лебегом множин.
5. Адитивність міри Лебега.
6. σ- алгебра вимірних за Лебегом множин.
7. σ- адитивність та неперервність міри Лебега.
8. Загальне означення міри. Приклади адитивних та σ- адитивних мір.
9. Лебегове продовження міри, визначеної на півкільці множин.
10. σ- скінченні міри.
11. Поняття про продовження міри за Жорданом.
12. Загальні зауваження про проблему міри. Існування невимірних множин.
13. Вимірні функції та їх зв'язок з вимірними множинами.
14. Арифметичні дії над вимірними функціями.
15. Границя послідовності вимірних функцій. Збіжність скрізь та майже скрізь.
16. Теорема Єгорова.
17. Збіжність за мірою збіжної майже скрізь послідовності.
18. Підпослідовності збіжних за мірою послідовностей.

Розділ 3. Інтеграл Лебега.

1. Прості функції та їх інтегрування за Лебегом.
2. Загальне означення інтеграла Лебега на множині скінченої міри.
3. Основні властивості інтеграла Лебега.
4. σ- адитивність інтеграла Лебега.
5. Інший підхід до питання про σ- адитивність.
6. Нерівність Чебишова та наслідок з неї.
7. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега.
8. Теорема Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.
9. Теорема Б.Леві та наслідки з неї.
10. Порівняння інтеграла Лебега з інтегралом Рімана.
11. Необхідні та достатні умови інтегрованості за Ріманом.
12. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри.
13. Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми.
14. Прямі добутки систем множин та добутки мір.
15. Подання плоскої міри через інтеграл лінійної міри перерізів.
16. Теорема Фубіні.

Розділ 4. Невизначений інтеграл Лебега.

1. Монотонні функції та їх властивості.
2. Функція стрибків. Представлення монотонних функцій.
3. Поняття про диференційованість монотонної функції.
4. Диференціювання ряду з монотонних функцій.
5. Функції з обмеженою зміною та їх властивості.
6. Похідна невизначеного інтеграла Лебега.
7. Теорема про сумовність похідної монотонної функції.
8. Абсолютно неперервні функції та їх властивості.
9. Зв'язок між поняттям абсолютної неперервності та невизначеним інтегралом Лебега.
10. Інтеграл Лебега як функція множини.
11. Міри та інтеграл Лебега-Стільтьєса.
12. Інтеграл Рімана-Стільтьєса та його властивості.
13. Теорема Хеллі про граничний перехід під знаком інтеграла Стільтьєса.

Розділ 5. Повні метричні простори.

1. Збіжність у метричних просторах.
2. Фундаментальні послідовності та їх зв'язок зі збіжними послідовностями.
3. Повні метричні простори. Повнота просторів R^1 та $C[a,b]$.
4. Простори R_p^n та їх повнота.
5. Простори l_p та їх повнота.
6. Існування неповних метричних просторів. Доповнення простору.
7. Теорема про вкладені кулі.
8. Необхідна та достатня умова компактності метричного простору.
9. Теорема Бера.
10. Неперервні відображення метричних просторів. Рівномірна неперервність.
11. Принцип стискаючих відображень.
12. Деякі узагальнення принципу стискаючих відображень.
13. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування рівнянь.
14. Лінійні відображення n- вимірних просторів.
15. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші.

Розділ 6. Лінійні, нормовані та евклідові простори.

1. Означення та приклади лінійних просторів.
2. Основні поняття, пов'язані з лінійними просторами.
3. Нормовані простори та їх підпростори.
4. Лема про представлення елементів банахового простору.
5. Простір L_1 та його повнота.
6. Простір L_2 та його повнота.
7. Повнота простору L_2 у випадку нескінченної міри.
8. Збіжність у середньому квадратичному та її зв'язок з іншими видами збіжності.
9. Означення та приклади евклідових просторів. Евклідовий простір L_2.
10. Існування ортогональних базисів. Ортогоналізація. Базис простору L_2.
11. Ряди Фур'є та нерівність Бесселя.
12. Зв'язок між замкненими і повними ортогональними системами.
13. Повні евклідові простори. Теорема Ріса-Фішера.
14. Зв'язок між тотальними і повними ортогональними системами.
15. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм.
16. Підпростори, ортогональні доповнення та прямі суми гільбертових просторів.
17. Характеристична властивість евклідових просторів.
18. Комплексні евклідові простори.
19. Многочлени Лежандра.
20. Ортогональні системи в добутках. Кратні ряди Фур'є.
21. Многочлени, ортогональні відносно заданої ваги. Многочлени Чебишова.
22. Ортогональні базиси у просторах L_2 з нескінченною мірою.

Розділ 7. Лінійні функціонали.

1. Означення і приклади лінійних топологічних просторів.
2. Лінійні функціонали. Корозмірність ядра лінійного функціонала.
3. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала.
4. Неперервні лінійні функціонали у лінійних топологічних та нормованих просторах.
5. Спряжений простір та його сильна топологія. Приклади спряжених просторів.
6. Повнота простору, спряженого до нормованого.
7. Структура простору, спряженого до гільбертового.
8. Слабка топологія та слабка збіжність. Достатня умова слабкої збіжності.
9. Слабка збіжність у просторах R^n, l_2, $C[a,b]$.
10. Слабка топологія та слабка збіжність у спряженому просторі.
11. Зчисленна передкомпактність обмежених множин спряженого простору.
12. Простори основних та узагальнених функцій. Диференціювання узагальнених функцій.
13. Різні підходи до побудови узагальнених функцій.

Розділ 8. Лінійні оператори.

1. Означення та приклади лінійних операторів.
2. Неперервність, обмеженість та норма лінійного оператора.
3. Простір лінійних обмежених операторів.
4. Оборотний та обернений оператори. Лінійність оператора, оберненого до лінійного.
5. Теорема Банаха про обернений оператор.
6. Відкритість множини операторів, які мають обмежений обернений.
7. Оператор, обернений до $I-A$.
8. Спряжені оператори у лінійних топологічних, нормованих та евклідових просторах. Самоспряженість.
9. Спектр та резольвента оператора.
10. Властивості власних значень та власних функцій самоспряженого оператора.
11. Компактні (цілком неперервні) оператори та дії над ними.
12. Компактність інтегрального оператора у просторі $C[a,b]$.
13. Границя послідовності компактних операторів.
14. Компактність інтегрального оператора Гільберта-Шмідта у просторі $L_2[a,b]$.
15. Власні значення компактного оператора.
16. Поняття про теорему Гільберта-Шмідта та її застосування до розв’язування операторних рівнянь.

Розділ 9. Лінійні інтегральні рівняння.

1. Означення та класифікація інтегральних рівнянь.
2. Застосування принципу стискаючих відображень до рівнянь Фредгольма другого роду у просторі $C[a,b]$.
3. Рівняння Фредгольма другого роду у просторі $L_2[a,b]$.
4. Рівняння Вольтерра другого роду.
5. Метод послідовних наближень для нелінійних інтегральних рівнянь.
6. Інтегральні оператори Фредгольма та дії над ними. Степінь оператора.
7. Метод ітерованих ядер для рівнянь Фредгольма другого роду.
8. Добуток та степінь інтегральних операторів Вольтерра.
9. Метод ітерованих ядер для рівнянь Вольтерра другого роду.
10. Інтегральні рівняння, ядра яких мають слабку особливість.
11. Формули Фредгольма. Резольвента Фредгольма.
12. Інтегральні рівняння з виродженим ядром. Перша теорема Фредгольма.
13. Друга теорема Фредгольма для рівнянь з виродженим ядром.
14. Третя теорема Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
15. Зведення довільного інтегрального рівняння Фредгольма до рівняння з виродженим ядром.
16. Поняття про теореми Фредгольма для рівнянь з довільними ядрами Фредгольма.
17. Наближене розв'язування операторних рівнянь.
18. Неперервна залежність розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма від ядер та вільних членів.
19. Операторні рівняння другого роду із самоспряженим компактним оператором.
20. Самоспряжені інтегральні оператори та інтегральні рівняння із симетричним ядром.
21. Зведення інтегрального рівняння Фредгольма до розв'язування задачі на власні значення.
22. Розклад симетричного ядра за його власними функціями.
23. Інтегральні рівняння, які зводяться до симетричних.
24. Рівняння Вольтерра першого роду.
25. Рівняння Фредгольма першого роду.
26. Теорема Пікара для інтегральних рівнянь Фредгольма із замкненим ядром.
27. Поняття про нефредгольмові інтегральні рівняння.
28. Сингулярні інтегральні рівняння.
29. Поняття про перетворення Лапласа. Таблиця оригіналів та зображень
30. Застосування перетворення Лапласа до розв'язування інтегральних рівнянь.
31. Лінійні інтегро-диференціальні рівняння.
32. Системи лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма.

Список літератури.

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977.

2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966.

3. Банах С. Курс функціонального аналізу. – К.: Радянська школа, 1948.

4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962.

5. Дороговцев А.Я., Івасишен С.Д., Кондратьєв Ю.С., Константинов О.Ю. Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу”Функціональний аналіз та інтегральні рівняння”. – Чернівці: Вид – во ЧДУ, 1992.

6. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.

7. Канторович А.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.- М.: Физматгиз, 1959.

8. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979.

9. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974.

10. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1974.

11. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.; Физматгиз, 1959.

12. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.

13. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций. – М.: Просвещение, 1991.

14. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965.

15. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1980.

16. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1973.

17. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: Из – во МГУ, 1986.

18. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. – М.: Наука, 1968.

19. Халмош П. Теория меры. – М.: ИЛ, 1953.

20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. – М.: ГИФМЛ, 1961.