

Курс лекцій з теорії міри та інтеграла Лебега

Розділ 1. Множини. Міра множини. Вимірні функції.

1. Множини та операції над ними.
2. Зчисленні множини та їх властивості.
3. Існування незчисленних множин. Незчисленність множини дійсних чисел.
4. Потужність множини. Порівняння потужностей.
5. Аксиоми відстані. Поняття про метричні простори.
6. Класифікація точок множини. Операція замикання.
7. Відкриті та замкнені множини і зв'язок між ними.
8. Структура відкритих і замкнених множин на числовій прямій. Канторова множина.
9. Поняття про компактність та зчисленну компактність.
10. Системи множин та їх властивості.
11. Поняття міри. Міра елементарних множин.
12. Півадитивність та σ -адитивність міри елементарних множин.
13. Зовнішня міра множини. Лебегове продовження міри.
14. Кільце вимірних за Лебегом множин.
15. Адитивність міри Лебега.
16. σ -алгебра вимірних за Лебегом множин.
17. σ -адитивність та неперервність міри Лебега.
18. Загальне означення міри. Приклади адитивних та σ -адитивних мір.
19. Лебегове продовження міри, визначеної на півкільці множин.
20. σ -скінченні міри.
21. Поняття про продовження міри за Жорданом.
22. Існування невимірних множин. Загальні зауваження про проблему міри.
23. Вимірні функції та їх зв'язок з вимірними множинами.
24. Арифметичні дії над вимірними функціями.
25. Границя послідовності вимірних функцій. Збіжність скрізь та майже скрізь.
26. Теорема Єгорова.
27. Збіжність за мірою збіжної майже скрізь послідовності.
28. Підпослідовності збіжних за мірою послідовностей.

Розділ 2. Інтеграл Лебега. Невизначений інтеграл Лебега.

1. Прості функції та їх інтегрування за Лебегом.
2. Загальне означення інтеграла Лебега на множині скінченої міри.
3. Основні властивості інтеграла Лебега.
4. σ -адитивність інтеграла Лебега.
5. Інший підхід до питання про σ -адитивність.
6. Нерівність Чебишова та наслідок з неї.
7. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега.

8. Теорема Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.
9. Теорема Б.Леві та наслідки з неї.
10. Порівняння інтеграла Лебега з інтегралом Рімана.
11. Необхідні та достатні умови інтегрованості за Ріманом.
12. Інтеграл Лебега по множині нескінченної міри.
13. Інтеграл Лебега як границя інтегральної суми.
14. Прямі добутки систем множин та добутки мір.
15. Подання плоскої міри через інтеграл лінійної міри перерізів.
16. Теорема Фубіні.
17. Монотонні функції та їх властивості.
18. Функція стрибків. Представлення монотонних функцій.
19. Поняття про диференційованість монотонної функції.
20. Диференціювання ряду з монотонних функцій.
21. Функції з обмеженою зміною та їх властивості.
22. Варіаційна функція та її властивості.
23. Похідна невизначеного інтеграла Лебега.
24. Теорема про сумовність похідної монотонної функції.
25. Абсолютно неперервні функції та їх властивості.
26. Зв'язок між поняттям абсолютної неперервності та невизначеним інтегралом Лебега.
27. Інтеграл Лебега як функція множини.
28. Міри та інтеграл Лебега-Стільтьєса.
29. Інтеграл Рімана-Стільтьєса та його властивості.
30. Теорема Хеллі про граничний перехід під знаком інтеграла Стільтьєса.

Практичні заняття.

- | | |
|--|--------------------|
| 1. Множини. Потужність множини. | Розділ 1. 1 – 4. |
| 2. Відкриті та замкнені множини. Системи множин. | Розділ 1. 5 – 10. |
| 3. Поняття міри. Лебегова міра множини. | Розділ 1. 11 – 15. |
| 4. σ -алгебри вимірних множин. Загальне означення міри. | Розділ 1. 16 – 20. |
| 5. Інші підходи до поняття міри. Вимірні функції. | Розділ 1. 21 – 24. |
| 6. Контрольна робота №1. | Розділ 1. 1 – 24. |
| 7. Послідовності вимірних функцій. | Розділ 1. 25 – 28. |
| 8. Інтеграл Лебега та його властивості. | Розділ 2. 1 – 7. |
| 9. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега. | Розділ 2. 8 – 9. |
| 10. Різні підходи до інтегрування і зв'язок між ними. | Розділ 2. 10 – 16. |
| 11. Монотонні функції та функції обмеженої варіації. | Розділ 2. 17 – 22. |
| 12. Контрольна робота №2. | Розділ 2. 1 – 22. |
| 13. Невизначений інтеграл Лебега. | Розділ 2. 23 – 26. |
| 14. Міри та інтеграли Стільтьєса. | Розділ 2. 27 – 30. |