

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
 «Затверджую»
 Проректор з навчальної роботи

підпис _____
 « ____ » _____ 200 ____ р.
 прізвище, ініціали

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА навчальної дисципліни

Функціональний аналіз

навчальна дисципліна

для студентів напряму підготовки (спеціальності)

Математика

назва напряму (-ів) підготовки, спеціальності (-ей)

Факультет *Математики та інформатики*

Кафедра *Математичного та функціонального аналізу*

Форма навчання	Курс	Семестр	Загальне навантаження		Кількість годин					Курсова робота	Змістовні модулі		Форма підсумкового контролю	
			Кредити ECTS	Годин	Аудиторних годин				Самостійна робота		Теоретичні	Практичні	Екзамен	Залік
					Всього	Лекції	Практичні (семінар.) заняття	Лабораторні заняття						
Денна	III	V-VI	6	162	104	52	52		58		3	3	+	+

Робоча навчальна програма складена на основі *робочого навчального плану галузі знань 0801 «Математика» напряму підготовки 6.080101 «Математика», Положення про кредитно-модульну систему організації навчального процесу у Прикарпатському університеті імені Василя Стефаника (затверджено Вченою радою університету, протокол № 3 від 28 листопада 2006 р.)*

Робоча навчальна програма складена *проф. Загороднюком Андрійом Васильовичем*

Робоча навчальна програма схвалена на засіданні кафедри *Математичного і функціонального аналізу (протокол №1 від 29 серпня 2008 р.)*

Завідувач кафедри _____ Загороднюк А.В.

Затверджено методичною радою факультету

Голова методичної ради _____ Копач М.І.

Декан _____ Пилипів В.М.

Івано-Франківськ, 2008

1. ЦІЛІ І ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ, ЇЇ МІСЦЕ У НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

Мета викладання дисципліни.

Ознайомити студентів з основними поняттями функціонального аналізу, зокрема, метричними, лінійними, нормованими, банаховими, евклідовими та гільбертовими просторами, лінійними функціоналами та операторами, узагальненими функціями, а також їх властивостями та застосуваннями цих властивостей до розв'язування конкретних задач як функціонального аналізу, так і суміжних дисциплін.

1.1. Завдання вивчення дисципліни.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

знати:

- *основні означення та теореми, пов'язані з перерахованими вище поняттями;*
- *можливості застосування властивостей цих понять до розв'язування практичних задач;*
- *взаємозв'язки перелічених вище понять з відповідними поняттями з інших дисциплін.*

вміти:

- *формулювати основні означення;*
- *формулювати і доводити основні теореми;*
- *розв'язувати конкретні задачі з використанням властивостей перерахованих вище понять .*

1.2. Завдання вивчення дисципліни.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

знати:

- *основні означення та теореми, пов'язані з перерахованими вище поняттями;*
- *можливості застосування властивостей цих понять до розв'язування практичних задач;*
- *взаємозв'язки перелічених вище понять з відповідними поняттями з інших дисциплін.*

вміти:

- *формулювати основні означення;*
- *формулювати і доводити основні теореми;*
- *застосовувати теореми та розв'язувати конкретні задачі з використанням властивостей перерахованих вище понять .*

1.3. Мета проведення лекцій:

- *ознайомлення студентів з основними поняттями функціонального аналізу;*
- *теоретичне обґрунтування властивостей метричних, лінійних, банахових та гільбертових просторів, лінійних функціоналів та операторів, визначених на цих просторах;*
- *встановлення взаємозв'язку з аналогічними поняттями з інших дисциплін.*

1.4. Завдання проведення лекцій.

У результаті проведення лекцій студенти повинні:

знати:

- *означення та властивості метричних та повних метричних просторів, принцип стискаючих відображень та його застосування;*
- *означення та властивості лінійних, нормованих, банахових, евклідових просторів та гільбертових просторів, зокрема ,класичних просторів послідовностей та функцій;*
- *поняття рефлексивного простору ,слабкої топології та слабкої збіжності в банахових просторах;*
- *означення та властивості лінійних функціоналів та операторів і можливості їх застосування до розв'язування задач;*
- *означення та властивості узагальнених функцій .*

вміти:

- *формулювати основні означення і теореми, застосовувати теореми;*
- *доводити теореми про властивості перерахованих вище об'єктів;*
- *теоретично обґрунтовувати можливості застосування цих властивостей до розв'язування задач.*

1.5. Мета проведення практичних занять.

- *Навчити студентів застосовувати властивості метричних, повних метричних, лінійних, нормованих, евклідових просторів та лінійних функціоналів і операторів до розв'язування конкретних задач як з функціонального аналізу, так і з суміжних дисциплін.*

1.6. Завдання проведення практичних занять.

У результаті проведення практичних занять студенти повинні:

знати:

- *основні можливості застосування властивостей метричних, повних метричних, лінійних, нормованих, евклідових просторів та лінійних функціоналів і операторів до розв'язування конкретних задач як з функціонального аналізу, так і з суміжних дисциплін ;*

вміти:

- *обґрунтовувати повноту чи неповноту метричного простору;*
- *вміти визначити чи дане відображення є стискуючим;*
- *досліджувати на збіжність послідовності в нормованих просторах;*
- *досліджувати на збіжність послідовності в слабкій топології в банахових просторах;*
- *обґрунтовувати лінійність та неперервність функціоналів і операторів та знаходити їх норми;*
- *знаходити обернені та спряжені оператори, власні значення та власні функції операторів;*
- *вміти виконувати дії над узагальненими функціями.*

2. ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ.

2.1. Теоретичні змістові модулі.

Теоретичний змістовий модуль №1

Метричні, лінійні, нормовані та евклідові простори

№ лекції	Перелік питань, які вивчаються на лекції	Використання технічних засобів навчання, програмного забезпечення, методичних посібників	Самостійна робота студентів		Форми контролю
			зміст	год.	
1.	1. Метричні простори. Приклади метричних просторів. Топологія у метричних просторах. 2. Фундаментальні послідовності та їх зв'язок зі збіжними послідовностями. 3. Повні метричні простори. Повнота просторів R^1 та $C[a,b]$. 4. Простори R_p^n та їх повнота.		Повторити класифікацію точок множини у метричному просторі	1	Поточне опитування + задача модуля
2.	5. Простори l_p та їх повнота. 6. Існування неповних метричних просторів. Поповнення простору. 7. Теорема про вкладені кулі. 8. Теорема Бера про категорії.		Порівняти з лемою про вкладені відрізки	1	Поточне опитування + задача модуля
3.	9. Неперервні відображення метричних просторів. Рівномірна неперервність. 10. Принцип стискаючих відображень. 11. Деякі узагальнення принципу стискаючих відображень. 12. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування рівнянь.		Повторити теореми Вейерштраса та Кантора з матаналізу	1	Поточне опитування + задача модуля

4.	13. Компактні метричні простори. Приклади. 14. Критерій компактності. 15. Зв'язок неперервності та рівномірної неперервності на компактах. 16. Теорема Арцела-Асколі.		Порівняння з критерієм компактності для \mathbb{R}^n . Приклади компактних множин.	1	Поточне опитування + задача модуля
5.	17. Означення та приклади лінійних просторів. 18. Основні поняття, пов'язані з лінійними просторами. 19. Базис в абстрактному лінійному просторі. 20. Нормовані простори та їх підпростори.		Приклади скінченно вимірних лінійних просторів	1	Поточне опитування + задача модуля
6.	21. Банахові простори. Приклади. 22. Пряма сума банахових просторів. Проектор. Фактор-простір. 23. Поняття про лінійні оператори та функціонали. 24. Еквівалентність лінійності і неперервності.		Повторити означення лінійного оператора і фактор-простору з лінійної алгебри	1	Поточне опитування + задача модуля
7.	25. Норма лінійного оператора і функціонала. 26. Ізоморфізм банахових просторів. 27. Еквівалентність норм у нормованих просторах. Приклади нееквівалентних норм. 28. Поняття про сепарабельність. Приклади несепарабельних банахових просторів.		Повторити означення ізоморфізму лінійних просторів	1	Поточне опитування + задача модуля

8.	<p>29. Означення та приклади евклідових просторів.</p> <p>30. Нерівність Коші-Буняковського. Метрика в евклідовому просторі.</p> <p>31. Тотожність паралелограма.</p> <p>32. Гільбертові простори. Комплексні гільбертові простори.</p>		Арифметичний евклідовий простір	1	Поточне опитування + задача модуля
9.	<p>33. Приклади: простір l_2, L_2, H_2.</p> <p>34. Ортогональність. Теорема про ортогональне доповнення.</p> <p>35. Теорема Піфагора в гільбертовому просторі.</p> <p>36. Ортогоналізація Гільберта-Грама.</p>		повторити означення і властивості скалярного добутку з лінійної алгебри	1	Поточне опитування + задача модуля
10.	<p>37. Існування ортогональних базисів. Базис простору L_2.</p> <p>38. Ряди Фур'є та нерівність Бесселя.</p> <p>39. Зв'язок між замкненими і повними ортогональними системами.</p>		Застосування ортогоналізації до конкретних систем векторів.	1	Поточне опитування + задача модуля
11.	<p>40. Теорема Ріса-Фішера.</p> <p>41. Теорема про ізоморфізм сепарабельних гільбертових просторів.</p>		Перевірити для неповних просторів	1	Поточне опитування + задача модуля
12	<p>42. Підпростори, ортогональні доповнення та прямі суми гільбертових просторів.</p> <p>43. Характеристична властивість евклідових просторів.</p> <p>44. Ортогональні базиси у просторі $L_2(-\infty, \infty)$.</p>		характеристична властивість в нормованих просторах	1	Поточне опитування + задача модуля

Теоретичний змістовий модуль №2

Лінійні функціонали та узагальнені функції

№ лекції	Перелік питань, які вивчаються на лекції	Використання технічних засобів навчання, програмного забезпечення, методичних посібників	Самостійна робота студентів		Форми контролю
			зміст	год.	
13.	1. Властивості лінійних функціоналів. Корозмірність ядра лінійного функціонала. 2. Перетворення Фур'є в L_1 і L_2 .		Повторити властивості інтегралів	1	Поточне опитування + задача модуля
14.	1. Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного функціоналу в класичних банахових просторах. 2. Наслідки з теорем Ріса.		Повторити означення норми лінійного функціонала	1	Поточне опитування + задача модуля
15.	3. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала. 4. Геометрична інтерпретація теореми Гана-Банаха. 5. Наслідки з теореми Гана-Банаха.		Приклади на застосування теореми Гана-Банаха	1	Поточне опитування + задача модуля
16.	6. Повнота простору, спряженого до нормованого. 7. Слабка топологія та слабка збіжність. Достатня умова слабкої збіжності. 8. Слабка збіжність у просторах R^n , l_2 , $C[a,b]$.		Простір, спряжений до R^n .	1	Поточне опитування + задача модуля

17.	<p>9. Другий спряжений простір.</p> <p>10. Рефлексивність. Приклади не рефлексивних просторів.</p> <p>11. *-слабка топологія та *-слабка збіжність у спряженому просторі.</p> <p>12. Приклади *-збіжних послідовностей.</p>		<p>Задачі на дослідження слабкої і *-слабкої збіжності</p>	1	<p>Поточне опитування + здача модуля</p>
18.	<p>13. Теорема Банаха-Алаоглу про компактність кулі спряженого простору в *-слабкій топології.</p> <p>14. Наслідки з теореми Банаха-Алаоглу.</p>		<p>дослідження неперервності функцій в *-слабкій топології</p>	1	<p>Поточне опитування + здача модуля</p>
19.	<p>15. Зліченно нормовані лінійні простори.</p> <p>16. Простори основних та узагальнених функцій. Збіжність.</p> <p>17. Операції над узагальненими функціями.</p> <p>18. Диференціювання узагальнених функцій.</p>		<p>Похідна добутку узагальненої функції на нескінченно диференційовну</p>	1	<p>Поточне опитування + здача модуля</p>
20.	<p>19. Теорема про достатність запасу основних функцій.</p> <p>20. Застосування узагальнених функцій.</p> <p>21. Різні підходи до побудови узагальнених функцій.</p>		<p>Перевірити що вказані функції належать до основних</p>	1	<p>Поточне опитування + здача модуля</p>

Теоретичний змістовий модуль №3

Лінійні оператори

№ лекції	Перелік питань, які вивчаються на лекції	Використання технічних засобів навчання, програмного забезпечення, методичних посібників	Самостійна робота студентів		Форми контролю
			зміст	год.	
21.	22. Приклади лінійних операторів. 23. Простір лінійних обмежених операторів. 24. Оборотний та обернений оператори. Лінійність оператора, оберненого до лінійного. 25. Норма оберненого оператора.		Лінійність оператора, оберненого до лінійного.	1	Поточне опитування + здача модуля
22.	26. Теорема Банаха про обернений оператор. 27. Теорема про замкнений графік. 28. Наслідки. 29. Принцип рівномірної обмеженості Банаха-Штейнгауса.		Повторити умови існування оберненого оператора в лінійній алгебрі	1	Поточне опитування + здача модуля
23.	30. Алгебра обмежених операторів. 31. Відкритість множини операторів, які мають обмежений обернений. 32. Оператор, обернений до $I - A$.		Сформулювати теорему Банаха-Штейнгауса для функціоналів.	1	Поточне опитування + здача модуля
24.	33. Спряжені оператори у нормованих та евклідових просторах. Самоспряженість. 34. Спектр та резольвента оператора.		Повторити про власні значення та власні вектори матриць	1	Поточне опитування + здача модуля

	35. Класифікація точок спектру.				
25.	36. Компактні (цілком неперервні) оператори та дії над ними. 37. Компактність інтегрального оператора Гільберта-Шмідта у просторі $L_2[a,b]$. 38. Власні значення компактного оператора. 39. Спектральна теорема для компактного оператора.		Застосування до інтегрального оператора	1	Поточне опитування + задача модуля
26	40. Поняття про спектральну міру. 41. Нормальні оператори. 42. Спектральна теорема для нормального і для самоспряженого оператора. 43. Поняття про необмежений замкнений самоспряжений оператор.		Повторити властивості міри	1	Поточне опитування + задача модуля

2.2. Практичні змістові модулі.

Практичний змістовий модуль №1 Метричні, лінійні, нормовані та евклідові простори

№ лекції	Перелік питань, які вивчаються практичному занятті	Використання технічних засобів навчання, програмного забезпечення, методичних посібників	Самостійна робота студентів		Форми контролю
			зміст	год.	
1.	1. Метричні простори. Приклади метричних просторів. Топологія у метричних просторах. 2. Фундаментальні послідовності та їх зв'язок зі збіжними послідовностями. 3. Повні метричні простори		Перевірка аксіом метрики	1	Перевірка домашніх завдань
2.	4. Простори l_p та їх повнота. 5. Існування неповних метричних просторів. Поповнення простору. 6. Теорема про вкладені кулі.		Обґрунтування повноти	1	Перевірка домашніх завдань
3.	7. Неперервні відображення метричних просторів. Рівномірна неперервність. 8. Принцип стискаючих відображень.		Застосування принципу стискаючих відображень.	2	Перевірка домашніх завдань
4.	9. Компактні метричні простори. Приклади. 10. Критерій компактності. 11. Зв'язок неперервності та рівномірної неперервності на компактах.		Дослідження послідовностей на збіжність	1	Перевірка домашніх завдань

5.	12. Нормовані простори та їх підпростори. 13. Банахові простори. Приклади. 14 Пряма сума банахових просторів. Проектор. Фактор-простір.		Перевірка аксіом норми	1	Перевірка домашніх завдань
6.	15. Норма лінійного оператора і функціонала. 16. Ізоморфізм банахових просторів. 17. Еквівалентність норм у нормованих просторах. Приклади нееквівалентних норм.		Обчислення норм лінійного функціоналу за означенням	2	Перевірка домашніх завдань
7.	18. Означення та приклади евклідових просторів. 19. Нерівність Коші-Буняковського. Метрика в евклідовому просторі. 20. Тотожність паралелограма.		Обчислення скалярного добутку	1	Перевірка домашніх завдань
8.	21. Теорема Піфагора в гільбертовому просторі. 22. Ортогоналізація Гільберта-Грама.		Застосування процедури ортогоналізації	1	Перевірка домашніх завдань
9.	23. Існування ортогональних базисів. Базис простору L_2 . 24. Ряди Фур'є та нерівність Бесселя.		Розклад в ряд Фур'є	1	Перевірка домашніх завдань
10.	25. Теорема Ріса-Фішера. 26. Теорема про ізоморфізм сепарабельних гільбертових просторів.		Встановити ізоморфізм	1	Перевірка домашніх завдань
11.	27. Підпростори, ортогональні доповнення та прямі суми гільбертових просторів. 28. Ортогональні базиси у просторі $L_2(-\infty, \infty)$.		Розклад по відповідних	1	Перевірка домашніх

			ортогональних базисах		завдань
12	Практичний модуль №1		Контрольна робота	2	Перевірка контрольної роботи

Практичний змістовий модуль №2

Лінійні функціонали та узагальнені функції

№ лекції	Перелік питань, які вивчаються на практичному занятті	Використання технічних засобів навчання, програмного забезпечення, методичних посібників	Самостійна робота студентів		Форми контролю
			зміст	год.	
13.	1. Перетворення Фур'є в L_1 і L_2 .		Обчислення перетворення Фур'є	1	Перевірка домашніх завдань
14.	2. Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного функціоналу в класичних банахових просторах. 3. Наслідки з теорем Ріса.		Обчислення норм лінійних функціоналів	2	Перевірка домашніх завдань
15.	4. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала. 5. Геометрична інтерпретація теореми Гана-Банаха. 6. Наслідки з теореми Гана-Банаха.		Приклади на застосування теореми Гана-Банаха	1	Перевірка домашніх завдань
16.	7. Слабка топологія та слабка збіжність. Достатня умова слабкої збіжності. 8. Слабка збіжність у просторах R^n , l_2 , $C[a, b]$.		Дослідження слабкої збіжності	1	Перевірка домашніх завдань
17.	9. Другий спряжений простір. 10. Рефлексивність. Приклади не рефлексивних просторів. 11. *-слабка топологія та *-слабка збіжність у спряженому просторі.		Задачі на дослідження слабкої і *-слабкої збіжності	2	Перевірка домашніх

	12. Приклади $*$ -збіжних послідовностей.				завдань
18.	13. Теорема Банаха-Алаоглу про компактність кулі спряженого простору в $*$ -слабкій топології. 14. Наслідки з теореми Банаха-Алаоглу.		дослідження неперервності функцій в $*$ -слабкій топології	1	Перевірка домашніх завдань
19.	15. Простори основних та узагальнених функцій. Збіжність. 16. Операції над узагальненими функціями. 17. Диференціювання узагальнених функцій. 18. Застосування узагальнених функцій.		Обчислення похідної узагальнених функцій	1	Перевірка домашніх завдань
20.	Практичний модуль №2		Контрольна робота	2	Перевірка контрольної роботи

Практичний змістовий модуль №3

Лінійні оператори

№ лекції	Перелік питань, які вивчаються на практичному занятті	Використання технічних засобів навчання, програмного забезпечення, методичних посібників	Самостійна робота студентів		Форми контролю
			зміст	год.	
21.	1. Простір лінійних обмежених операторів. лінійного. 2. Норма оператора.		Обчислення норми оператора.	2	Перевірка домашніх завдань
22.	3. Теорема Банаха про обернений оператор. 4. Теорема про замкнений графік.		Умови існування оберненого оператора	1	Перевірка домашніх завдань
23.	5. Алгебра обмежених операторів. 6. Відкритість множини операторів, які мають обмежений обернений. 7. Оператор, обернений до $I - A$.		Обчислення $(I - A)^{-1}$.	1	Перевірка домашніх завдань
24.	8. Спряжені оператори у нормованих та евклідових просторах. Самоспряженість.		Знаходження спряженого оператора	1	Перевірка домашніх завдань
25.	9. Спектр та резольвента оператора. 10. Класифікація точок спектру. 11. Спектральна теорема для компактного оператора.		Знаходження спектру оператора	2	Перевірка домашніх завдань

26	Практичний модуль №2		Контрольна робота	2	Перевірка контрольної роботи
----	----------------------	--	----------------------	---	------------------------------------

3. НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

3.1. Основна і додаткова література

№ з/п	Автор (автори)	Назва	Видавництво, рік	К-сть екз.
-------	----------------	-------	------------------	------------

Основна література

1.	Антоневич А.Б., Радыно Я.В.	Функциональный анализ и интегральные уравнения	Минск, БГУ 2006.	1
2.	Ахиезер Н.И., Глазман И.М	Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.	М.: Наука, 1966	1
3.	Колмогоров А.М., Фомін С.В.	Елементи теорії функцій і функціонального аналізу.	К.: Вища школа, 1974.	20
4.	Краснов М.Л.	Интегральные уравнения.	М.: Наука, 1974.	3
5.	Натансон И.П.	Теория функций вещественной переменной.	М.: Наука, 1974.	10
6.	Очан Ю.С.	Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций.	М.: Просвещение, 1991.	5
7.	Садовничий В.А.	Теория операторов.	М.: Из – во МГУ, 1986.	5
8.	Соболев В.И.	Лекции по дополнительным главам математического анализа.	М.: Наука, 1968.	3

Додаткова література

№ з/п	Автор (автори)	Назва	Видавництво, рік	К-сть екз.
1.	Данфорд Н., Шварц Дж.Т.	Линейные операторы. Общая теория.	М.: ИЛ, 1962.	2
2.	Иосида К.	Функциональный анализ.	М.: Мир, 1977.	2
3.	Канторович А.В., Акилов Г.П.	Функциональный анализ в нормированных пространствах.	М.: Физматгиз, 1959.	1

3.2. Наочні посібники, методичні вказівки та інші матеріали

№ з/п	Найменування посібника, методичних вказівок	Номери лекцій, практичних (семінарських, лабораторних занять), на яких використовуються навчально-методичні матеріали	К-сть
1.	Дороговцев А.Я., Івасишен С.Д., Кондратьєв Ю.С., Константинов О.Ю. Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу "Функціональний аналіз та інтегральні рівняння". – Чернівці: Вид – во ЧДУ, 1992.	Практичні заняття № 1 – 11, 13 – 19, 21 – 25.	4
2.	Завдання для контрольних робіт та самостійного розв'язування.	Практичні заняття № 12, 20, 26.	30

4. САМОСТІЙНА НАВЧАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ

Семестр	Номер п / п	Зміст самостійної роботи	Обсяг (год.)	Форма контролю	Тиждень, на якому здійснюється контроль
V	1	Метричні, лінійні, нормовані та евклідові простори	12	Теоретичний модуль	9
	3	Метричні, лінійні, нормовані та евклідові простори	14	Практичний модуль	7

Семестр	Номер п / п	Зміст самостійної роботи	Обсяг (год.)	Форма контролю	Тиждень, на якому здійснюється контроль
VI	1	Лінійні функціонали та узагальнені функції	8	Теоретичний модуль	9
	2	Лінійні оператори	6	Теоретичний модуль	17
	3	Лінійні функціонали та узагальнені функції	10	Практичний модуль	7
	4	Лінійні оператори	8	Практичний модуль	14

Викладач

_____ підпис

_____ прізвище, ініціали

" _____ " _____ 200__ р.